

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน เรื่อง สมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้

เข้าใจความหมาย และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

สาระสำคัญ

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

บทนิยาม 10

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ถ้า $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วจะเรียก B ว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix) ของ A เขียนแทนด้วย A'

สมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$ เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
2. $(AB)^t = B^t A^t$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$
3. $(A^t)^t = A$
4. $(cA)^t = cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายการหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
2. อธิบายสมบัติเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้
3. ใช้สมบัติเมทริกซ์สลับเปลี่ยนแก้ปัญหาเกี่ยวกับเมทริกซ์ได้

สาระการเรียนรู้

จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ให้ } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } B' = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว A' จะเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$ ที่มีสมาชิกในแถวที่ i เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ i ของ A ทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

สมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$ เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
2. $(AB)^t = B^t A^t$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$
3. $(A^t)^t = A$
4. $(cA)^t = cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้เกี่ยวกับสมาชิกในแถวและหลักของเมทริกซ์ โดยกำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. ครูถามคำถามนักเรียนดังนี้

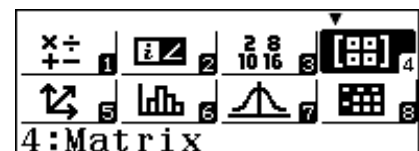
- 4) เมทริกซ์ A มีกี่แถว (m แถว) มีกี่หลัก (n หลัก)
- 5) ขนาดของเมทริกซ์ A คือ $(m \times n)$
- 6) a_{23} เป็นสมาชิกในแถวและหลักใดของเมทริกซ์ A (สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 3)

3. ครูแนะนำขั้นตอนในการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ในการหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน ดังต่อไปนี้

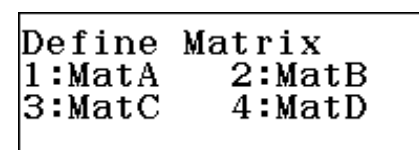
กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

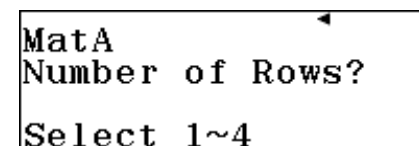
- 1) กดปุ่ม **MENU** กด **4** เพื่อเลือกเมนู 4: Matrix



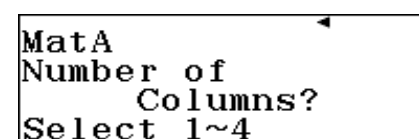
- 2) กดปุ่ม **1** เพื่อสร้าง Matrix A



- 3) กำหนด จำนวนแถว (Row) เป็น 2 กดปุ่ม **2**



- 4) กำหนด จำนวนหลัก (Columns) เป็น 2 กดปุ่ม **2**



5) ใส่สมาชิกของเมทริกซ์ A ดังนี้

กด **0** **=** **1** **=** **2** **=** **3** **=**

MatA=
[0 1
2 3]

6) กดปุ่ม **AC** เพื่อไปที่หน้าคำนวณเมทริกซ์

Matrix

7) กด **OPTN** **▼** จะพบคำสั่ง 3:Transposition

1:Define Matrix
2>Edit Matrix
3:MatA 4:MatB
5:MatC 6:MatD

1:MatAns
2:Determinant
3:Transposition
4:Identity

8) กดปุ่ม **3** เพื่อเลือกคำสั่ง 3: Transposition

Trn(I)

9) ต้องการสลับเปลี่ยนเมทริกซ์ใด ในที่นี้เมทริกซ์ A

กด **OPTN** เพื่อเรียกเมทริกซ์

1:Define Matrix
2>Edit Matrix
3:MatA 4:MatB
5:MatC 6:MatD

เมทริกซ์ A อยู่ที่ 3: MatA ให้กด **3** **)**

Trn(MatA)

10) กดปุ่ม **=** หน้าจอจะแสดง MatAns ซึ่งก็คือ ทราบสโผลของเมทริกซ์ A หรือเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A นั่นเอง

MatAns=
[1 2
3 1]

11) จากนั้นครูจึงสรุปว่าคำตอบที่ได้คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A แทนด้วยสัญลักษณ์ $A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเพื่อทำใบกิจกรรมที่ 5 โดยให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ รุ่น fx-991EX Classwiz ในการสำรวจคำตอบและให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงข้อค้นพบในแต่ละข้อโดยทำทีละข้อ (ขั้นการสำรวจและหาความสัมพันธ์)

6. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 1 นักเรียนจะได้สำรวจเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ (ขั้นการสำรวจ)

7. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 1 เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปจากการตอบคำถามท้ายข้อซึ่งมีแนวตอบดังนี้ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

- ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว A' จะมีขนาดเท่ากับเท่าใด (แนวตอบ $n \times m$)
- สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของ B ตรงกับสมาชิกตัวใดของ B' (แนวตอบแถวที่ 1 หลักที่ 2)
- สมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 2 ของ C ตรงกับสมาชิกตัวใดของ C' (แนวตอบแถวที่ 2 หลักที่ 3)
- จงอธิบายความหมายของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (แนวตอบ เมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับสมาชิกในแถวกับหลัก เช่น แถวที่ 1 ของ A จะเป็นหลักที่ 1 ของ A')

8. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 2 นักเรียนจะได้สำรวจค่า $A' + B'$ และ $(A + B)'$ (ขั้นการสำรวจ) ซึ่งการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์สำรวจค่า $A' + B'$ และ $(A + B)'$ ทำได้ดังนี้

- กำหนดเมทริกซ์ A และ B

MatA= $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ <div style="text-align: right; font-weight: bold;">1</div>	MatB= $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ <div style="text-align: right; font-weight: bold;">8</div>
--	---

- คำนวณค่าของ $(A + B)'$

Trn(MatA+MatB)I	MatAns= $\begin{bmatrix} -2 & 15 & 7 \\ 10 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ <div style="text-align: right; font-weight: bold;">-2</div>
-----------------	--

- คำนวณค่าของ $A' + B'$

Trn(MatA)+Trn(MatB)	MatAns= $\begin{bmatrix} -2 & 15 & 7 \\ 10 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ <div style="text-align: right; font-weight: bold;">-2</div>
---------------------	--

- จึงสรุปได้ว่า $(A + B)' = A' + B'$

9. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 2 เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $A' + B' = (A + B)'$ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

10. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 3 นักเรียนจะได้สำรวจค่า $(AB)'$ และ $B' A'$ (ขั้นการสำรวจ) ซึ่งการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์สำรวจค่า $(AB)'$ และ $B' A'$ ทำได้แนวทางเดียวกันกับการสำรวจในข้อ 2)

11. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 3 เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(AB)' = B' A'$ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

12. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 4 นักเรียนจะได้สำรวจค่า $(A')'$ (ขั้นการสำรวจ) ซึ่งการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์สำรวจค่า $(A')'$ ทำได้ดังนี้

- กำหนดเมทริกซ์ A

MatA= $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ <div style="text-align: right; font-weight: bold;">1</div>
--

- คำนวณค่าของ $(A')^t$

$$\text{Trn}(\text{Trn}(\text{MatA}))\text{I}$$

$$\text{MatAns} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

-2

13. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 4 เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(A')^t = A$ (ขั้นสรุป ความสัมพันธ์)

14. จากกิจกรรมในใบกิจกรรมข้อที่ 5 นักเรียนจะได้สำรวจค่า $(cA)^t$ กับ $c(A')$ (ขั้นการสำรวจ) ซึ่งการใช้เครื่องคำนวณสำรวจค่า $(A')^t$ ทำได้ดังนี้

- กำหนดเมทริกซ์ A

$$\text{MatA} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1

- คำนวณค่าของ $(3A)^t$

$$\text{Trn}(3\text{MatA})$$

$$\text{MatAns} = \begin{bmatrix} -6 & 24 & 6 \\ 18 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

-6

- คำนวณค่าของ $3(A')$

$$3\text{Trn}(\text{MatA})\text{I}$$

$$\text{MatAns} = \begin{bmatrix} -6 & 24 & 6 \\ 18 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

-6

15. เมื่อทำกิจกรรมข้อที่ 5 เสร็จ ครูและนักเรียนร่วมกันสรุป ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า $(cA)^t = c(A')$ (ขั้นสรุป ความสัมพันธ์)

16. ให้นักเรียนร่วมกันตรวจสอบว่า $(AB)^t = A'B'$ หรือไม่ (ขั้นการตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน) ซึ่งการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ ทำได้ดังนี้

- กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{MatA} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

7

$$\text{MatB} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2

- คำนวณค่าของ $(AB)^t$

MatAns=	Trn(MatA MatB)
$\begin{bmatrix} 28 & 41 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$	
28	

- คำนวณค่าของ $A^t B^t$

Trn(MatA) Trn(MatB)	MatAns=
	$\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 22 & 39 \end{bmatrix}$
	5

- จึงสรุปว่า $(AB)^t \neq A^t B^t$

- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 5 เรื่องเมทริกซ์สลับเปลี่ยน โดยไม่ใช่เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (ชั้นการฝึกทักษะ)
- ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

- เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
- ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่องเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
- แบบฝึกทักษะที่ 5 เรื่องเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

การวัดผลและประเมินผล

- ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 5
- ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 5
- ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 5

เรื่อง เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1) จงหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1.1 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t =$

1.2 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $B^t =$

1.3 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ จะได้ $C^t =$

1.4 $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้ $D^t =$

คำถามท้ายกิจกรรม

1. ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว A^t จะมีขนาดเท่ากับเท่าใด

.....

2. สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของ B ตรงกับสมาชิกตัวใดของ B^t

.....

3. สมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 2 ของ C ตรงกับสมาชิกตัวใดของ C^t

.....

4. จงอธิบายความหมายของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

.....

2) จงหาผลบวกของเมทริกซ์ต่อไปนี้

2.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

$A^t + B^t =$

$(A + B)^t =$

2.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^t + C^t =$$

$$(A + C)^t =$$

2.3 กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 17 & 13 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & -9 \end{bmatrix}$

$$B^t + D^t =$$

$$(B + D)^t =$$

จากข้อ 2.1-2.3 จงสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

.....

.....

3) จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

3.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$(AB)^t =$$

$$B^t A^t =$$

3.2 กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

$$(CD)^t =$$

$$D^t C^t =$$

3.3 กำหนดให้ $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & -9 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

$$(EF)^t =$$

$$F^t E^t =$$

จากข้อ 3.1-3.3 จงสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

.....

4) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & -9 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

$$(A^t)^t =$$

$$(B^t)^t =$$

$$(C^t)^t =$$

จากข้อ 4) จงสร้างข้อความคาดการณ์

.....

5) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & -9 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

$$(5A)^t =$$

$$5A^t =$$

$$(7B)^t =$$

$$7B^t =$$

$$(15C)^t =$$

$$15C^t =$$

จากข้อ 5) จงสร้างข้อความคาดการณ์

.....

แบบฝึกทักษะที่ 5

เรื่อง เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ต่อไปนี้ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $A' =$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้ $B' =$ สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 ของ B' คือ

3. $C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ จะได้ $C =$ สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 ของ C คือ

4. $A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ จะได้

$(A+B)' =$

$A' + B' =$

5. $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้

$(10A)' =$

$10(A') =$

6. $A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ จะได้

$(AB)' =$

$B' A' =$